ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

(ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

Δήμογλου Κων/νος

Μαθηματικός (MSC)

Άσκηση 1 :

α. Εφόσον $-\frac{11\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} - 2\pi$ οι

Τριγωνομετρικοί αριθμοί του $-\frac{11\pi}{8}$ ταυτίζονται

με αυτούς του $\frac{5\pi}{8}$.

$$\cos\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8}. \quad (1)$$

Όμως, $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

Άρα, $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (απορ την αρνητική

αφού $\sin\frac{\pi}{8} > 0$) Συνεπώς, η (1) γράφεται

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

Επίσης,

$$\sin\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}. \quad (2)$$

Εφόσον $\overset{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{\sin^2}\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Άρα, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (απορ. την αρνητική αφού $\cos\frac{\pi}{8} > 0$). Συνεπώς, η (2) γράφεται

$$\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Τέλος, $\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{5\pi}{8}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

και $\cot\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$

β. Εφόσον $-\frac{2021\pi}{12} = -\left(\overbrace{\frac{2016\pi}{12}}^{2\cdot 84\pi} + \frac{5\pi}{12}\right)$

έχουμε

$$\cos\left(-\frac{2021\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2021\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

Όμως, $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Άρα, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (απορ. την αρνητική)

Συνεπώς η σχέση (1) γράφεται:

$$\cos\left(-\frac{2021\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Επίσης,

$$\sin\left(-\frac{2021\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{2021\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad (2)$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Άρα, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ (Απορ. των αρνητικών)

Συνεπώς, η σχέση (2) γράφεται:

$$\sin\left(-\frac{2021\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

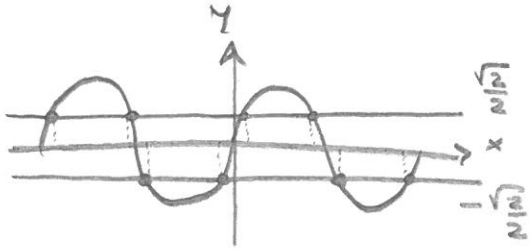
Τέλος, $\tan\left(-\frac{2021\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, και

$$\cot\left(-\frac{2021\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Δήμογλου Κων/νος

Μαθηματικός (MSC)

• $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$



$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \quad \Bigg| \quad k \in \mathbb{Z}$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Εφόσον $x \in [0, 3\pi]$, για την 1η περίπτωση, έχουμε:

$$0 \le x \le 3\pi \Leftrightarrow 0 \le \begin{cases} 2k\cancel{\pi} + \frac{\cancel{\pi}}{4} \\ 2k\cancel{\pi} + \frac{3\cancel{\pi}}{4} \end{cases} \le 3\cancel{\pi} \Leftrightarrow$$

$$0 \le \begin{cases} 2k + \frac{1}{4} \\ 2k + \frac{3}{4} \end{cases} \le 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} \le 2k \le 3 - \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \le 2k \le 3 - \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{8} \le k \le \dfrac{3 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{11}{8} \Leftrightarrow k = 0, 1 \\ -\frac{3}{8} \le k \le \dfrac{3 - \frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{8} \Leftrightarrow k = 0, 1 \end{cases}$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Άσκηση 2 :

$$6 \cdot \sin^4 x + \sin^2 x - 2 = 0 \quad , \quad x \in [0, 3\pi]$$

Θέτουμε $y = \sin^2 x$ και η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$6 \cdot y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49 > 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} y_1 = -\frac{2}{3}. \\ y_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Οπότε,

$\sin^2 x = -\frac{2}{3}$. (αδύνατη) και $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Bigg| \; k \in \mathbb{Z}$

και

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Για τη $2^η$ περίπτωση έχουμε:

$$0 \le \begin{cases} 2k\cancel{\pi} - \frac{\cancel{\pi}}{4} \\ 2k\cancel{\pi} + \frac{5\cancel{\pi}}{4} \end{cases} \le 3\cancel{\pi} \Leftrightarrow$$

$$0 \le \begin{cases} 2k - \frac{1}{4} \\ 2k + \frac{5}{4} \end{cases} \le 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \le 2k \le 3 + \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \le 2k \le 3 - \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{8} \le k \le \frac{3 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{13}{8} \Leftrightarrow k = 1 \\ -\frac{5}{8} \le k \le \frac{3 - 5/4}{2} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow k = 0 \end{cases}$$

Συνολικά λοιπόν οι ρίζες της εν λόγω εξίσωσης είναι οι: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$ (αυτές από την $1^η$ περίπτωση) και

$\frac{5\pi}{4}$ και $\frac{7\pi}{4}$ (λύσεις απ' τη $2^{η}$ περίπτωση).

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Άσκηση 3.

$$\sqrt{6}\cdot \sin(2x) + \sqrt{2}\cos(2x) + 2 = 0.$$

$$\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cos(2x)\right) = -2$$

$$\cancel{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)\right) = -\cancel{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot \sin(2x) + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2k\pi - \frac{5\pi}{12}}{2} \\ x = \dfrac{2k\pi + \frac{13\pi}{12}}{2} \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad k\in\mathbb{Z}$$

Άσκηση 4 :

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

$$\sin(x+a) = -2\sin(x-a)$$

$$\sin x \cdot \cos a + \sin a \cos x = -2\sin x \cos a + 2\sin a \cos x$$

$$3\sin x \cos a = \sin a \cos x$$

$$3\sin x = \tan a \cdot \cos x$$

$$\cancel{3}\sin x = -\cancel{3}\sqrt{3}\cdot\cos x$$

Αρχικά, $\cos x \neq 0$ διότι αν $\cos x = 0$

τότε $\sin x = 0$, όμως αυτό είναι

άτοπο γιατί $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Άρα, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\sqrt{3} \iff \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \iff x = k\pi - \frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Άσκηση 5 :

$$\sin(5x) + \sqrt{2}\sin(10x) + \sin(15x) = 0$$

Θυμίζουμε ότι:

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Έτσι, η εξίσωση

$$\big(\sin(5x) + \sin(15x)\big) + \sqrt{2}\sin(10x) = 0$$

$$2\sin(10x)\cdot\cos(-5x) + \sqrt{2}\cdot\sin(10x) = 0$$

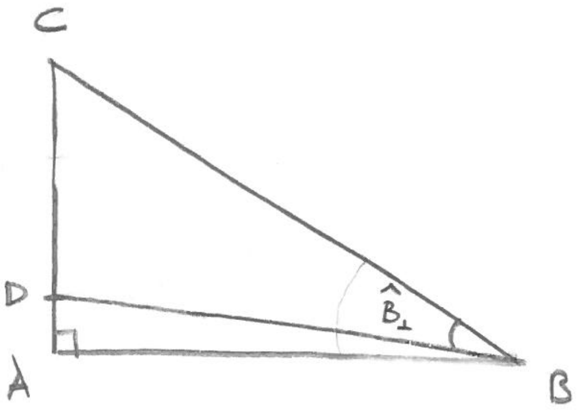
$$\sin(10x)\big(2\cos(5x) + \sqrt{2}\big) = 0$$

$$\sin(10x) = 0 \quad \text{ή} \quad \cos(5x) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$10x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ 5x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Bigg|\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{10},\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2k\pi + 3\pi/4}{5} \\ x = \dfrac{2k\pi - 3\pi/4}{5} \end{cases} \Bigg|\ k\in\mathbb{Z}$$

Άσκηση 6.



Θδο $\tan(\hat{B}_1) = \dfrac{4\tan\hat{B}}{5+\tan^2\hat{B}}$

Θέτουμε $\hat{B}_2 = D\hat{B}A$

Είναι $\tan(\hat{B}_1) = \tan(\hat{B}-\hat{B}_2)$

$$= \frac{\tan\hat{B} - \tan\hat{B}_2}{1+\tan B\cdot\tan\hat{B}_2} = \frac{\tan\hat{B} - \frac{AD}{AB}}{1+\tan B\cdot\frac{AD}{AB}}$$

$$= \frac{\tan\hat{B} - \frac{1/5\cdot AC}{AB}}{1+\tan B\cdot\frac{1/5\cdot AC}{AB}} = \frac{\tan\hat{B} - \frac{1}{5}\cdot\tan\hat{B}}{1+\frac{1}{5}\cdot\tan^2\hat{B}}$$

$$= \frac{4/5\ \tan\hat{B}}{1+\frac{1}{5}\cdot\tan^2\hat{B}} = \frac{4\cdot\tan\hat{B}}{5+\tan^2\hat{B}}$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)